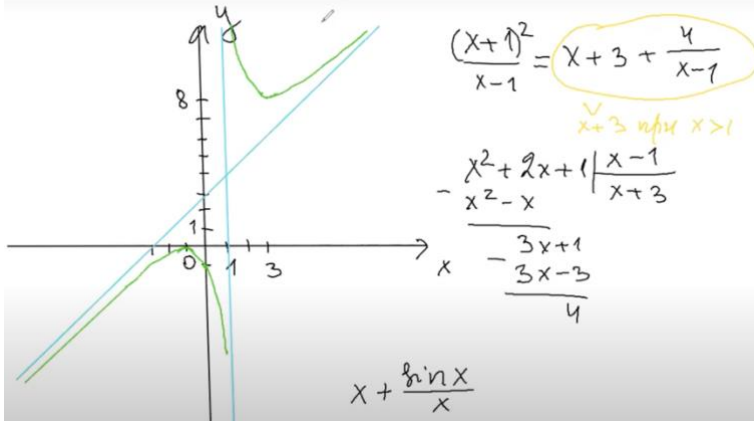


Опр. 2 Говорят, что график ф-ции f имеет вертикальную асимптоту $x=a$, если $f(a+0)$ и/или $f(a-0)$ равен $\pm\infty$. Напр., $f(x)=\ln x$; $x=0$ - верт. асимптота

Опр. 3 График ф-ции f имеет наклонную асимптоту $y=kx+b$ при $x \rightarrow +\infty (-\infty)$, если $f(x)-(kx+b)=d(x)$, где $d(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty (-\infty)$. В частности, при $k=0$ прямую $y=b$ называют горизонтальной асимптотой. Напр., $f(x)=\arctg x$. $y=\pm \frac{\pi}{2}$ - horiz. ac-ты при $x \rightarrow \pm\infty$

Общая схема исследования функции

- 1) Область определения.
- 2) Точки разрыва, промежутки непрерывности.
- 3) Нули, промежутки знакопостоянства. $f(0)$
- 4) Чётность, периодичность, другая симметрия.
- 5) Монотонность, экстремумы.
- 6) Выпуклость, точки перегиба.
- 7) Асимптоты.
- 8) Поведение в граничных точках обл-и опр-я.



T.5 $y=kx+b$ - наклонная асимптота графика ф-ции f при $x \rightarrow \pm\infty \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$.

До-во! $\Rightarrow f(x) = kx + b + d(x)$, $d(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \pm\infty$
 $\Rightarrow \frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{d(x)}{x} \rightarrow k$; $f(x) - kx = b + d(x) \rightarrow b$, $x \rightarrow \pm\infty$.
 $\Leftarrow$ Если $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$, то $f(x) - (kx+b) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \pm\infty$.
 $\Rightarrow f(x) - (kx+b) = d(x)$, где $d(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \pm\infty$. $\square$

Пример $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-1}$. 1) $X = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 2) Непр-на $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$. $x=1$ - разрыва 2-го рода.
 3) f $\frac{-}{-1} \frac{-}{1} \frac{+}{+}$ Точки пересечения с осями: $(-1, 0)$ и $(0, -1)$
 4) f' $\frac{+}{-1} \frac{-}{1} \frac{+}{3}$ $(-1, 0)$ - г. max, $(3, 8)$ - г. min
 5) $f'(x) = \frac{2(x+1)(x-1) - (x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$
 6) $f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x - 3) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = 2 \cdot \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 + 2x + 3}{(x-1)^3} = \frac{8}{(x-1)^3}$

f'' $\frac{-}{-1} \frac{+}{1} \frac{+}{3}$ $f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$
 7) $x=1$ - вертикальная ac-та;
 $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x+1)^2}{x-1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x+1)^2}{x-1} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)^2}{x(x-1)} = 1 = k$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{(x+1)^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + x}{x-1} = 3$
 $y = x+3$ - накл-я ac-та при $x \rightarrow \pm\infty$